



ITEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

Apostila de Matemática Financeira

MATEMÁTICA FINANCEIRA

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Termos usados

i = do inglês ***Interest*** , é usado para representar **os *juros*** envolvidos em quaisquer operações financeiras.

C = do inglês ***Capital*** , é usado para representar o ***Capital*** utilizado numa aplicação financeira.

M = do inglês ***amount*** , é usado para representar o ***Montante*** que é o resultado da soma do Capital com os juros.

n = nesse caso é uma incógnita (quem aprendeu equações do segundo grau usou muitas incógnitas. Todos aqueles x, y, z são incógnitas.) referente ao *período de tempo (dias, semanas, meses, anos...)* de uma aplicação financeira. Lembre-se da expressão : "levou n dias para devolver o dinheiro..."

a.d. = abreviação usada para designar ***ao dia***

a.m. = abreviação usada para designar ***ao mês***

a.a. = abreviação usada para designar ***ao ano***

d = do inglês ***Discount*** , é usado para representar o ***desconto*** conseguido numa aplicação financeira.

N = do inglês ***Nominal*** , é usado para representar o ***valor Nominal*** *ou de face* de um documento financeiro.

A = do inglês ***Actual*** , é usado para representar o ***valor real ou atual*** de um documento financeiro em uma determinada data.

V = incógnita usada para representar o ***Valor Atual*** em casos de renda certa ou anuidades

T = incógnita usada para representar o ***Valor Nominal*** em casos de renda certa ou anuidades

$a_{n}\neg_{i}$ = expressão que representa o *fator de* ***valor atual*** de uma série de pagamentos.

$S_{n}\neg_{i}$ = expressão que representa o ***fator de acumulação de capital*** de uma série de pagamentos.

CONVERSÃO DE DATAS

Suponha que você faça um crediário no dia 10 e , claro, precisa calcular quantos dias restam até o final do mês . "Ora (Pensa você) é só verificar qual dia termina o mês (se dia 28, 30 ou 31) e subtrair a diferença. Bico!"
Você estará , na verdade, 50% certo . Na verdade, existem 2 métodos para calcular um intervalo entre duas datas:

Tempo exato : é o referido acima . Você verifica em que dia , exato, termina o prazo que você tem e calcula a diferença. Por exemplo, entre 25 de abril e 27 de setembro você tem 155 dias.

Tempo aproximado ou comercial : é aquele no qual assumimos que cada mês possui 30 dias. Assim, Seguindo o intervalo de datas acima temos decorridos 5 meses de 25 de abril a 25 de setembro (ou seja 150 dias) mais 2 dias até 27 de setembro e temos como total 152 dias.

A diferença, é claro, acaba sendo mínima mas quando altas quantias estão envolvidas, um dia faz muita diferença.

Lembre-se que , para fins de equivalência/proporcionalidade , um ano tem 12 meses e um mês tem 30 dias .

JUROS SIMPLES

É composto da seguinte fórmula :

$$j = C.i.n$$

Exemplo

Você pediu a seu chefe um empréstimo de $ 10.000,00 e ele, que não é bobo, vai lhe cobrar uma taxa de juros de 5% ao mês , sobre o capital inicial . 6 meses depois você quita sua dívida. Quanto a mais você terá de pagar , a título de juros?

Aplicando a fórmula:

j : o que você quer descobrir
C:R$ 10.000,00

i:5% a.m.
n:6 meses
Logo: j=10000. 0,05.6 resultando R$ 3.000,00 de juros pagos (Whoa!). Quase um terço do total emprestado

Cuidado com as taxas mensais supostamente baixas . Pelo exemplo acima , fica evidenciado que mesmo taxas pequenas, se forem aplicadas por um período mais ou menos longo,pode causar um verdadeiro prejuízo ao bolso.Um grande exemplo do dia-a-dia? Cre-di-á-rio !

MONTANTE (JUROS SIMPLES)

Montante nada mais é do que a soma de um capital com os juros aplicados a ele. Seguindo o exemplo da seção anterior, o Capital inicial (principal) era de $ 10.000,00 e os juros incidentes foram de $ 3.000,00 (ou seja , **M = C+j**). Logo, o *Montante* é de R$ 13.000,00. Bico, não?

A fórmula para calcular o Montante direto é:

M = C. (1 + i.n)

Exemplo

Seu chefe, num ato de generosidade desmedida e pressionado pelo Sindicato, informou que, no mês que vem, dará um aumento de 3% no salário de todos os funcionários . Supondo-se que você ganhe $ 1.100,00 , para quanto vai o seu salário?

Aplicando a fórmula =>

M = o que você quer descobrir
C=1.100,00
i=3% a.m.
n=1 mês
Logo: M=1100. (1 + 0,03.1) resultando $ 1.133,00 , o que já dá para pagar um cineminha ou então comprar mais alguns lanchinhos no McDonald's para a criançada. (eheheheh)...

DESCONTO COMERCIAL SIMPLES

O desconto é aplicado quando um empréstimo é saldado antes do vencimento previsto e, claro, desde que esse desconto esteja previsto em contrato.
A fórmula é:

$$d = N.i.n$$

Exemplo

Qual o desconto de um título no valor de R$ 50.000,00, se ele for pago 2 meses antes do vencimento à uma taxa de 5,5 % a.m.?

Aplicando a fórmula:

d : o que você quer saber
N :50.000,00
i :5,5% - 0,055
n:2
Logo : 50000 . 0,055 . 2 = > R$ 5.500,00 de desconto

VALOR ATUAL / NOMINAL

O cálculo do valor atual está para o Desconto Simples como o Montante para o cálculo de Juros Simples , ou seja, é o valor final após calcular o desconto.

Seguindo o exemplo da seção anterior, o Valor Nominal do título era de R$ 50.000,00 e o desconto incidente foi de $ 5.500,00 (ou seja , A = N-d). Logo, o *Valor Atual* é de $ 44.500,00. Bico, não?

A fórmula para o cálculo direto do Valor Atual é:

$$A = N. (1-i.n)$$

Exemplo

Após receber sua devolução do I.R., você resolve quitar de uma vez as suas parcelas restantes do seu consórcio, num valor total de $ 70.000,00. Faltam 5 parcelas mensais e o desconto será de um 1% a.m. .Quanto você terá de pagar em cash ?

Aplicando a fórmula:

A = o que você quer descobrir
N=70.000,00
i=1% a.m.
n=5 meses

Logo: A=70000. (1 - 0,01.5) resultando $ 66.500,00 .

TAXAS EQUIVALENTES

Em linguagem simples, são duas taxas ou mais taxas que, quando aplicadas, em determinado lapso de tempo em determinada quantia têm como resultado o mesmo valor.
Digamos assim: você tem uma aplicação que rende 1 % a.m. se você aplicar durante 6 meses . E você tem outra que rende 12 % a.a. se você aplicar durante um ano. Qual é mais vantajosa? É tudo a mesma coisa , ou seja, elas são equivalentes, ou não? Ou será que é melhor pagar antecipadamente uma dívida ou aplicar o dinheiro e pagá-la no vencimento previsto?

Muitas vezes você vai ouvir sobre Taxas Nominais, Taxas Efetivas, Taxas Reais e Aparentes. Mas, afinal, do que se trata tudo isso?

Vamos lá:

Taxa Nominal
- é quando o período de formação e o período de incorporação de juros ao Capital não coincide com aquele a que a taxa está referenciada.
- quando você diz, por exemplo, que uma aplicação é de 35% ao ano só que a

capitalização é mensal ou que a aplicação financeira é de 0,85% ao mês só que a capitalização é diária, como os FIFs ou FAQs, de capitalização diária, dos bancos.

Taxa Efetiva
- quando o período de formação e o período de incorporação de juros ao Capital coincidem com aquele a que a taxa está referenciada.
- quando você diz, por exemplo, que uma aplicação é de 1 % ao mensal e capitalização é mensal, como a poupança.

Taxa Real
- é a taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária do período. Seguindo o exemplo da poupança, quando o Governo diz que a poupança tem um rendimento real de 0,5% ao mês (taxa aparente), significa que seu dinheiro foi corrigido primeiro pela inflação do período e sobre este montante foi aplicado 0,5%.

Equivalência entre duas taxas no regime de juros simples

É só pegar a taxa e multiplicá-la (ou dividí-la) pelo período correspondente ao que deseja descobrir.

Exemplo :

você tem uma taxa de 5% a.m. e quer saber quanto é equivalente ao ano. Um ano tem 12 meses então é só multiplicar 5% por 12 e você tem 60% a.a.
O inverso também é verdadeiro : você tem uma taxa de 15% a.m. e quer saber quanto é ao dia . É só dividir 15% por 30 dias e você tem 0,5% a.d.

Equivalência entre duas taxas no regime de juros composto

Se você quer passar de uma unidade de tempo "menor" para uma "maior" , como de mês para ano, você eleva a taxa de juros pelo número de períodos correspondente. Se for o contrário, como por exemplo de ano para mês, você eleva ao inverso do período .

De a. m. para a.a.= > $i_a = (1+i_m)^{12} - 1$

De a.d. para a.m. = > $i_m = (1+i_d)^{30} - 1$

De a.d. para a.a. = > $\mathbf{i_a = (1+i_d)^{360} -1}$

De a.a. para a.m. => $\mathbf{i_m = (1+i_a)^{1/12} -1}$

De a.m. para a.d. = > $\mathbf{i_a = (1+i_m)^{1/30} -1}$

De a.a para ad. = > $\mathbf{i_d = (1+i_a)^{1/360} -1}$

Exemplo :

você tem uma taxa de 24% a.a. e quer saber quanto é equivalente ao mês. Usando a fórmula dá aproximadamente 1,81% a.m.

Faça uma prova de confirmação : use as duas taxas sobre um valor simples como R$ 1.000,00 e veja se o resultado é igual.

Equivalência entre uma aplicação e um desconto no regime de juros simples

Há ocasiões em que será necessário verificar se a taxa de juros aplicada a um capital e a taxa de juros aplicada para fins de desconto são equivalentes.
Isso é fundamental para decidir se vale a pena pagar antes, aplicar , reinvestir , etc..
A fórmula para determinar uma taxa equivalente é :

Se você tem a taxa de desconto e quer descobrir a taxa de juros correspondente:

$$\mathbf{i / 1- i.n}$$

Se você tem a taxa de juros para aplicação e quer descobrir a taxa de desconto correspondente:

i / 1+ i.n

Exemplo:

Vamos pegar um capital de $ 60.000,00 investido a juros simples de 8% a.m. por 3 meses. Qual a taxa de desconto simples equivalente ?
Usando a fórmula : i / 1+ i.n = > 0,08 / 1,08*3 = >0,0645
Ou seja 6,45% a.m. de desconto é equivalente a 8% a.m. para aplicação, em regime de juros simples, num prazo de 3 meses.

JUROS COMPOSTOS

Os juros compostos referem-se às situações em que os juros são integrados ao Capital, a cada cálculo.

Para facilitar, vamos pegar um exemplo clássico: Caderneta de Poupança. A cada mês os juros são incorporados ao Capital e no próximo mês os juros incidirão sobre esse montante e assim sucessivamente.Nos caso dos juros compostos, o resultado é o próprio Montante. A fórmula é:

$$C_n = C. (1 + i)^n$$

Exemplo

Uma aplicação bancária está oferecendo juros fixos de 3% a.m. por 6 meses, sobre um valor mínimo de $ 10.000,00. Quanto renderá ao final desse período?
Aplicando a fórmula:
C_n ou M - o que você quer saber
C - 10.000,00
i - 3 % - 0,03
n - 6
Logo : $10000. (1+0,03)^6$ => 11.940,52.

DESCONTO COMPOSTO

O conceito de desconto em juro composto é similar ao de desconto em juro simples. A fórmula é:

$$A= N. 1/ (1+i)^n$$

No final deste texto existe uma tabela com o cálculo dos fatores $(1+i)^n$.

Exemplo

Suponhamos que você quer descontar um título de $ 25.000,00 , 2 meses antes do vencimento, de um banco que utiliza uma taxa de juro composto de 3% a.m.Calcule o valor atual do título .

Aplicando a fórmula:

A - o que você quer saber
N - 25.000,00
i - 3 % - 0,03
n - 2
Logo : $25000.1/ (1+0,03)^2$ => 23.564,90

RENDAS CERTAS OU ANUIDADES

Anuidades ou rendas certas é o nome que se dá aos pagamentos sucessivos tanto a nível de financiamentos quanto de investimentos.

Se a renda possui um número finito de termos será chamada de *temporária* caso contrário é chamada de *permanente*.
Agora, se os termos da renda certa forem iguais é chamada de *renda certa de termo constante* ou *renda certa uniforme*; senão é uma *renda certa de termo variável*

Finalmente, quando o período entre as datas correspondentes aos termos tiverem o mesmo intervalo de tempo , diz-se que a renda certa é *periódica* ; caso contrário é *não periódica*.



Exemplo

- Um financiamento de casa própria é um caso de renda certa temporária, de termo variável (sujeito à variação da TR) e periódica.
- Um financiamento de eletrodoméstico é um caso de renda certa temporária, de termo constante (você sabe quanto pagará de juros) e periódica.
- Já a caderneta de poupança pode se considerar como um caso de renda certa perpétua (pelo menos enquanto o dinheiro estiver à disposição para aplicação), de termo variável e periódica.

As rendas ***periódicas*** podem ser divididas em :
Postecipadas
Antecipadas
Diferidas

As ***Postecipadas*** são aquelas na qual o pagamento no fim de cada período e não na origem.
Exemplo: pagamento de fatura de cartão de crédito

As ***Antecipadas*** são aquelas na qual os pagamentos são feitos no início de cada período respectivo.
Exemplo: financiamentos com pagamento à vista

E as *Diferidas* são aquelas na qual o primeiro pagamento é feito após um determinado período.
Exemplo: promoções do tipo, compre hoje e pague daqui a x dias

Os cálculos envolvendo renda certa lembram os cálculos de **Juros Compostos** e **Descontos Compostos** comentados em capítulos anteriores.

Em linguagem leiga,a diferença entre esses e os casos de Renda Certa , é que nesse último você calcula quanto teve de juros , sobre uma base de cálculo fixa, podendo a mesma ser dividida em n parcelas ; no caso dos **Juros Compostos e Descontos** Compostos, a base de cálculo varia por período.

CALCULANDO VALOR ATUAL EM CASOS DE RENDAS CERTAS

Trabalharemos aqui com cálculos de renda certas do tipo ***periódicos***, ***de termos constantes*** e ***temporários***, os quais são , usualmente, os mais pedidos em





concursos.

Para se calcular o Valor Atual num caso de Rendas Certas, a fórmula a ser utilizada depende de ser *postecipada* , *antecipada* ou *diferida*. Assim , se for:

Postecipada a fórmula é : $V=T.a_{n}\neg_{i}$

Antecipada a fórmula é : $V=T+T.a_{n-1}\neg_{i}$

Diferida a fórmula é : $V=T.a_{n}\neg_{i}/(1+i)^{m}$

m *é sempre uma unidade menor do que a se deseja calcular, ou seja, se a venda é diferida de 3 meses, m será 2 .*

Para saber o valor de $a_{n}\neg_{i}$, você pode:
-usar as tabelas
-calcular usando a fórmula $(1+i)^{n}-1/i(1 + i)^{n}$.

Exemplo

Um carro é vendido a prazo em 12 pagamentos mensais e iguais de $2.800,00 (num total de $ 36.000,00), sendo a primeira prestação no ato da compra, ou seja, o famoso " com entrada" , ou ainda, um caso de renda certa antecipada. Sendo que a loja opera a uma taxa de juros de 8% a.m. , calcule o preço à vista desse carro.
Aplicando a fórmula:
n=12
T=2800
V=$2800+2800.a_{11}\neg_{8\%}$=>$ 22.789,10

Outro exemplo

Um dormitório é vendido em 4 prestações de $ 750,00, com o primeiro pagamento para 3 meses após a compra (ou seja, esse é um caso de diferida) Sabendo que a loja trabalha com juros de 6% a.m. , calcule o valor à vista .
Aplicando a fórmula:
n=4
T=750
m=2

i= 6%
V=$750.a_{4}\neg_{6\%}/(1+.06)^{2}$=>750.3,465106/1.1236=>$2.312,95

CALCULANDO O MONTANTE EM CASOS DE RENDAS CERTAS

Como você deve se lembrar, montante nada mais é do que a somatória dos juros com o capital principal. No caso de rendas certas , a fórmula é dada por:

$$M=T.S_{n}\neg_{i}$$

Para saber o valor de $S_{n}\neg_{i}$ você pode:
-usar as tabelas
-calcular usando a fórmula $(1+i)^{n}-1/i$.

Exemplo
Calcule o Montante de uma aplicação de $ 100,00 , feita durante 5 meses, a uma taxa de 10% a.m.
Aplicando a fórmula (esse é um caso de *postecipada*, porque o primeiro rendimento é um mês após a aplicação) :
n=5
T=100
i=10% a.m.
M=$100.S_{5}\neg_{10\%}$=>$ 610,51

Quando for uma situação de

antecipada *: subtraia 1 de n*

diferenciada *: após determinar $S_{n}\neg_{i}$, divida o resultado por $(1+i)^{m}$*

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE

Neste sistema, o devedor obriga-se a restituir o ***principal*** em **n prestações** nas quais as cotas de amortização são sempre constantes. Ou seja, o principal da dívida é dividido pela quantidade de períodos n e os juros são calculados em relação aos saldos existentes mês a mês. A soma do valor de amortização mais o dos juros é que fornecerá o valor da prestação.

Não há necessidade de fórmulas complicadas mas você precisará montar uma planilha em situações de períodos mais ou menos longos. Esse tipo de empréstimo é usado pelo SFH e também, em certos casos, em empréstimos às empresas privadas através de entidades governamentais.

Exemplo

Na compra de um apartamento de $ 300.000,00, você faz um financiamento em um banco com juros de 4% a.m., a ser pago em 5 meses. Calcule a prestação mensal.

O valor da *amortização* é calculado dividindo-se o principal pela quantidade de períodos, ou seja, 300.000 por 5, o que perfaz 60.000
Os juros são calculados sobre os saldos da prestação desta forma:

1º mês	300.000	*	4%	=	12.000,00
2º mês	240.000	*	4%	=	9.600,00
3º mês	180.000	*	4%	=	7.200,00
4º mês	120.000	*	4%	=	4.800,00
5º mês	60.000	*	4%	=	2.400,00

Os saldos são calculados subtraindo-se apenas o valor da amortização. Por exemplo, no primeiro mês você pagará $ 72.000,00 de prestação mas do saldo devedor será subtraído apenas o valor da amortização que é $ 60.000,00.

Ou seja, você ao final você pagará $ 336.000,00 em 5 prestações, sendo a primeira de $ 72.000,00 , a segunda de $ 69.600,00 , a terceira de $ 67.200,00 , a quarta de $ 64.800 e a quinta de $ 62.400,00. Disso, $ 300.000, 00 corresponde ao principal e $ 36.000,00 aos juros.

SISTEMA PRICE DE AMORTIZAÇÃO

Batizado em homenagem ao economista inglês Richard Price, o qual incorporou a teoria dos juros compostos às amortizações de empréstimos, no século XVIII, é uma variante do Sistema Francês.

O sistema Price caracteriza-se por pagamentos do *principal* em prestações iguais mensais, periódicas e sucessivas. A prestação é calculada pela fórmula :

$$T.\ a_{n \neg i}$$

Os juros são calculados sobre o saldo devedor e o valor da amortização é a diferença entre o valor dos juros e da prestação.

Exemplo

Na compra de um apartamento de R$ 300.000,00, você faz um financiamento em um banco com juros de 4% a.m., a ser pago em 5 meses.Calcule a prestação mensal:

Aplicando a fórmula:

$F= T.\ a_{n \neg i}$

$300000=T.\ a_{5 \neg 4\%}$

T=67.388,13

Ou seja, ao final você pagará R$ 336.940,65 em 5 prestações, correspondente R$ 300.000,00 ao valor de amortização e R$ 36.940,65 aos juros .

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTA (SAM)

Esse sistema é baseado no **SAC** E no Sistema Price. Nesse caso, a prestação é igual à média aritmética entre as prestações dos dois outros sistemas, nas mesmas condições.

Exemplo

Na compra de um big de um apartamento de R$ 300.000,00, você faz um financiamento em um banco com juros de 4% a.m., a ser pago em 5 meses.Calcule a prestação mensal:

Esse problema já foi resolvido pelos outros dois sistemas, logo, tudo o que se tem a fazer é somar os valores das prestações dos dois casos e dividir por dois .

Ou seja, você ao final você pagará $ 336.470,34 em 5 prestações,divididas da seguinte forma :

1ª	$ 69.694,06
2ª	$ 68.494,07
3ª	$ 67.294,07
4ª	$ 66.094,07
5ª	$ 64.894,07

Disso, $ 300.000,00 corresponde ao principal e $ 36.470,34 aos juros.

SISTEMA AMERICANO

Neste sistema, o devedor obriga-se a devolver o ***principal*** em um único pagamento, normalmente ao final, enquanto os ***juros*** são pagos periodicamente. Nesse caso , não existem cálculos complexos. Se for uma taxa de juros fixa, basta usar um cálculo de *juros simples* que você terá o total de juros, dividindo o mesmo pelo período terá os pagamentos mensais

Exemplo:
Na compra de um apartamento de $ 300.000,00, você faz um financiamento em um banco com juros de 4% a.m., a ser pago em 5 meses.Calcule a prestação mensal:

Calculando:
300.000 *4%*5=>60.000,00
Ou seja, você ao final você pagará $ 360.000,00 em 5 prestações, correspondendo $ 300.000,00 ao valor de amortização, paga de uma única vez ao final do período e $ 60.000,00 de juros, pagos em 5 prestações iguais de $ 12.000,00

Há casos em que o cliente , não desejando pagar de uma só vez o valor do principal, negocia com o banco a criação de um fundo de amortização denominado

SINKING FUND de forma que, ao final do período, o total de fundo seja igual ao valor a pagar . Um tipo de caderneta de poupança forçada vamos assim dizer.

A prestação é calculada pela fórmula :

$$M=T.\ S_{n}\neg_{i}$$

Ou se você preferir, divida o principal pelo número de prestações, que você terá o valor do depósito mensal a ser feito.

Fator de Acumulação de Capital

$$a^n = (1+i)^n$$

n\ i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,01000	1,02000	1,03000	1,04000	1,05000	1,06000	1,07000	1,08000	1,09000	1,10000
2	1,02010	1,04040	1,06090	1,08160	1,10250	1,12360	1,14490	1,16640	1,18810	1,21000
3	1,03030	1,06121	1,09273	1,12486	1,15763	1,19102	1,22504	1,25971	1,29503	1,33100
4	1,04060	1,08243	1,12551	1,16986	1,21551	1,26248	1,31080	1,36049	1,41158	1,46410
5	1,05101	1,10408	1,15927	1,21665	1,27628	1,33823	1,40255	1,46933	1,53862	1,61051
6	1,06152	1,12616	1,19405	1,26532	1,34010	1,41852	1,50073	1,58687	1,67710	1,77156
7	1,07214	1,14869	1,22987	1,31593	1,40710	1,50363	1,60578	1,71382	1,82804	1,94872
8	1,08286	1,17166	1,26677	1,36857	1,47746	1,59385	1,71819	1,85093	1,99256	2,14359
9	1,09369	1,19509	1,30477	1,42331	1,55133	1,68948	1,83846	1,99900	2,17189	2,35795
10	1,10462	1,21899	1,34392	1,48024	1,62889	1,79085	1,96715	2,15892	2,36736	2,59374
11	1,1	1,2	1,3	1,5	1,7	1,8	2,1	2,3	2,5	2,8

15 43 84 39 10 98 04 31 80 53
67 37 23 45 34 30 85 64 43 12

Tabelas

Fator de Valor Atual de uma série de Pagamentos

$$a_{n}\neg_{i}=(1+i)^{n}-1 / i*(1+i)^{n}$$

n/i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10 %
1	0,990099	0,980392	0,970874	0,961538	0,952381	0,943396	0,934579	0,925926	0,917431	0,909091
2	1,970395	1,941561	1,913470	1,886095	1,859410	1,833393	1,808018	1,783265	1,759111	1,735537
3	2,940985	2,883883	2,828611	2,775091	2,723248	2,673012	2,624316	2,577097	2,531295	2,486852
4	3,901966	3,807729	3,717098	3,629895	3,545951	3,465106	3,387211	3,312127	3,239720	3,169865
5	4,853431	4,713460	4,579707	4,451822	4,329477	4,212364	4,100197	3,992710	3,889651	3,790787
6	5,795476	5,601431	5,417191	5,242137	5,075692	4,917324	4,766540	4,622880	4,485919	4,355261
7	6,728195	6,471991	6,230283	6,002055	5,786373	5,582381	5,389289	5,206370	5,032953	4,868419

8	7,651678	7,325481	7,019692	6,732745	6,463213	6,209794	5,971299	5,746639	5,534819	5,334926
9	8,566018	8,162237	7,786109	7,435332	7,107822	6,801692	6,515232	6,246888	5,995247	5,759024
10	9,471305	8,982585	8,530203	8,110896	7,721735	7,360087	7,023582	6,710081	6,417658	6,144567

Fator de Acumulação de Capital de uma série de Pagamentos

$$S_{n\neg i} = (1+i)^{n}-1 / i$$

n/i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,010000	2,020000	2,030000	2,040000	2,050000	2,060000	2,070000	2,080000	2,090000	2,100000
3	3,03010	3,06040	3,09090	3,12160	3,15250	3,18360	3,21490	3,24640	3,27810	3,31000

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4,060401	4,121608	4,183627	4,246464	4,310125	4,374616	4,439943	4,506112	4,573129	4,641000
5	5,101005	5,204040	5,309136	5,416323	5,525631	5,637093	5,750739	5,866601	5,984711	6,105100
6	6,152015	6,308121	6,468410	6,632975	6,801913	6,975319	7,153291	7,335929	7,523335	7,715610
7	7,213535	7,434283	7,662462	7,898294	8,142008	8,393838	8,654021	8,922803	9,200435	9,487171
8	8,285671	8,582969	8,892336	9,214226	9,549109	9,897468	10,259803	10,636628	11,028474	11,435888
9	9,368527	9,754628	10,159106	10,582795	11,026564	11,491316	11,977989	12,487558	13,021036	13,579477
10	10,462213	10,949721	11,463879	12,006107	12,577893	13,180795	13,816448	14,486562	15,192930	15,937425

CUSTO REAL E EFETIVO DAS OPERAÇÕES DE FINANCIAMENTO

Noções básicas

No mundo real, existe uma grande confusão a respeito do significado da **``taxa de juro''** que está sendo utilizada na operação financeira.

A taxa de juro que é especificada em contratos nem sempre corresponde à taxa de juro que está sendo efetivamente praticada na operação financeira. Isso ocorre, de um lado porque o procedimento utilizado para definição da operação financeira resulta numa taxa de juro efetiva que pode diferir substancialmente da taxa especificada no contrato. A utilização ou não de valores reais no cômputo dessa taxa efetiva, define se essa taxa efetiva é nominal ou real.

Utilizaremos a terminologia introduzida no próximo quadro para distinguir mais claramente as noções existentes.


ITEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

- Taxa de juro contratual é a taxa que consta explicitamente no contrato para computo dos procedimentos utilizados para recebimentos e pagamentos. Nem sempre corresponde 'a taxa efetiva da operação.

- Taxa de juro efetiva nominal é a taxa efetivamente paga na operação e é idêntica ao valor j^* que resolve a equação:

$$V_0 + \frac{V_1}{1+j^*} + \frac{V_2}{(1+j^*)^2} + \ldots + \frac{V_n}{(1+j^*)^n} = 0,$$

  onde $V_i, i = 0, \ldots, n,$ são os valores nominais dos pagamentos/recebimentos realizados nos períodos 0 a n. O valor j^* que resolve essa equação é usualmente chamado de taxa interna de retorno e raramente pode ser calculado analiticamente. Um valor aproximado para j^* pode ser obtido por tentativa e erro; para obtenção do valor exato é geralmente mais prático se recorrer à utilização de programas (planilhas eletrônicas por exemplo) ou calculadoras que internalizam métodos numéricos para obtenção da taxa interna de retorno. As prestações devem considerar os encargos diversos definidos em contrato.

- Taxa de juro efetiva real é calculada de forma similar à taxa nominal com a diferença de que nesse caso os valores utilizados são previamente corrigidos para valores reais de um dado período através da utilização de índices apropriados ou, alternativamente, esses valores já são definidos em valor de um período definido. O primeiro caso ocorre geralmente na análise "ex-post" de fluxos realizados. O segundo na análise "ex-ante" de fluxos futuros (análise de projetos por exemplo).


ITEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

Exemplo 16 – Desejamos conhecer a taxa de juro efetiva real praticada em um empréstimo no qual a pessoa recebeu 100 UM no início de um mês 0 e teve que pagar 120 UM no início do mês 1, considerando que o índice de inflação foi 125 no início do mês 0 e 135 no início do mês 1.

Solução: A taxa efetiva nominal de juros j do problema proposto seria calculada por

$$j = \frac{120{,}00}{100{,}00} - 1 = 0{,}20,$$

ou 20% em termos percentuais. Para calcular a taxa de juro efetiva real devemos fazer a conversão do valor nominal do período final em valores do período 0 utilizando a taxa de inflação do período. Altenativamente, podemos também fazer a conversão do valor do período inicial para valores do período final. No caso faremos a conversão do valor pago no mês 1 para valores do mês 0:

$$VR_{\text{mês } 0} = \frac{125}{135} \times 120 = 111,11.$$

Isso indica que os 120 UM no mês 1 correspondem a 111,11 UM em termos de moeda do mês 0. Estando os valores correspondentes ao recebimento e pagamento convertidos devidamente para valores do mês 0 é possivel se calcular a taxa de juro real associada ao empréstimo por

$$r = \frac{111,11}{100} - 1 = 0{,}1111,$$

ou 11,11% em termos percentuais.



ITEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

Exemplo 17 – Uma pessoa tomou um empréstimo de 100 UM por um mês, pelo qual pagará juro de 10% mais 5% à título de correção monetária pré-fixada, pagos juntamente com o reembolso do valor emprestado. O banco cobra, adicionalmente, uma taxa de 2,5% descontados do valor liberado à título de despesa administrativa.

- Qual seria a taxa contratual e a taxa efetiva nominal nesse caso?
- Qual seria a taxa efetiva real "ex-post" se a inflação durante o mês foi de 7%?

Solução: A taxa de juro contratual no caso é de 10%. Para cálculo da taxa efetiva nominal teriamos que compor o fluxo correspondente à operação que no caso consistiria no recebimento de 97,5 UM no início de um período (100 UM menos 2,5 UM das despesas administrativas) e restituição de 115 UM que seria o valor inicial acrescido de 10% de juro e 5% de correção monetária pré-fixada. Essa taxa seria calculada pelo valor j que soluciona a equação

$$97,50 - \frac{115}{1+j} = 0,$$

que seria $j^* = 0{,}1795$, ou seja 17,95% ao mês. Para cálculo da taxa efetiva real, temos que, inicialmente, corrigir o valor pago no mês 1 para valores do mês 0, utilizando a taxa de inflação no período que foi de 7%. As 115 UM no mês 1 corresponderiam ao valor de 107,48, em moeda do período 0, calculado por

$$\frac{115}{1,07} = 107,48.$$

A taxa efetiva real seria computada pelo valor de j que soluciona

$$97,50 - \frac{107,48}{1+j} = 0,$$

que seria $j^* = 0,1024$ ou 10,24%.



De um modo geral podemos encontrar a taxa de juros efetiva real a partir da taxa de inflação e da taxa efetiva nominal utilizando o resultado apresentado no próximo quadro.

Se representarmos a taxa de inflação por i, a taxa de juro nominais por j e a taxa de juro real por r temos

$$(1+j) = (1+r)(1+i).$$

Esse último resultado pode ser facilmente provado por argumentos elementares apresentados a seguir.

Se VFR representa o valor final em termos reais em valor do período inicial e VI o valor inicial, temos pela definição de taxa de juro real que

$$(1+r) = \frac{VFR}{VI},$$

mas, se VF representa o valor final em termos nominais,

$$VFR = \frac{VF}{(1+i)}$$

dado que **i** representa a taxa de inflação do período. Logo

$$(1+r) = \frac{VF}{(1+i)\times VI} \quad \text{ou} \quad (1+r)(1+i) = \frac{VF}{VI}$$

mas, por definição,

$$\frac{VF}{VI} = (1+j).$$

Se substituirmos esse resultado na expressão anterior e re-arranjarmos os termos chegamos ao resultado desejado:

$$(1+j) = (1+i)(1+r).$$

DESCONTO DE TÍTULOS

Um exemplo comum que ilustra bem a questão associada a juros contratuais e efetivos é o desconto comercial de títulos.

É uma prática comercial usual o desconto de títulos correspondentes a um valor a ser recebido em um dado período futuro. Os possuidores desses títulos freqüentemente desejam vendê-los no momento presente para investidores/instituições financeiras que aceitam esperar para recebimento do valor estipulado no título na data do pagamento, o qual é chamado valor de resgate.

A compra desses títulos usualmente é efetuada por um valor calculado a partir do valor de resgate do título, do qual é subtraído um desconto, que é freqüentemente calculado em termos percentuais.

No desconto comercial ou bancário, também chamado de desconto ``por fora'', que é o mais comumente utilizado no Brasil, a taxa de desconto é calculada sobre o valor de resgate. A taxa efetiva nesse caso é sempre superior à taxa de desconto definida.

Um exemplo comum de operações desse tipo é o desconto de ``duplicatas", que correspondem a uma promessa de pagamento de um valor determinado por uma empresa ou pessoa física para um determinado período.

Exemplo 18 *empresário deseja levantar recursos através do desconto de uma duplicata com valor de resgate de 100 UM, para o pagamento em 30 dias. Isso significa que ele pode esperar os 30 dias para receber as 100 UM ou, alternativamente, pode vender essa duplicata para um investidor, por um valor inferior à 100 UM visando receber dinheiro no momento presente. Digamos que o investidor se ofereça para comprar duplicata com o desconto de 10%, ou seja, compre a duplicata por 90 UM. Na realidade, o empresário estará pagando mais que 10% de juros, e o investidor ganhando mais que 10%, pois estará aplicando 90 UM para receber 100 UM no período de um mês, o que corresponde à taxa de juro efetiva que seria calculada pelo valor de j que soluciona:*

$$100 = 90 \times (1 + j)$$

que seria

$$j = \frac{100}{90} - 1 = 0{,}1111$$

ou 11,11%.

Deve-se ter cuidado com o desconto de títulos que pressupõem a aplicação dos juros sobre o capital final, como no desconto comercial de duplicatas da forma usual, pois os juros efetivamente pagos são superiores aos estabelecidos nominalmente na operação de desconto. Existe também o conceito de desconto ``racional'', menos utilizado na prática, no qual a taxa de desconto é definida de forma a ser idêntica a taxa efetiva da operação.

Exemplo 19 *investidor está comprando um título cujo valor de resgate em 2 meses será de 1.000 UM. Ele deseja comprar esse título pelo valor de resgate menos um desconto comercial de 10% de juros simples por mês incidentes sobre o valor de resgate.*

- *Quanto estaria o investidor disposto a pagar pelo título?*
- *Qual seria a taxa de juro efetiva na operação?*
- *Qual seria o desconto "racional" calculado utilizando a taxa de 10%?*

O desconto seria calculado considerando os dois meses de juro incidente sobre o valor de resgate por

$$2 \times 0{,}10 \times 1.000 = 200,$$

ou seja 200 UM. O investidor pagaria então 800 UM por esse título hoje. A taxa efetiva seria computada pelo valor de j que soluciona a equação

$$800 - \frac{1.000}{(1+j)^2} = 0,$$

ou $j = 0{,}1180$, correspondente à taxa de 11,80% de capitalização composta. O desconto racional poderia ser calculado à partir do valor presente do título hoje, considerando uma taxa de 10%. Esse valor seria:

$$\frac{1.000}{1,10^2} = 826,45$$

ou seja, o desconto seria de 173,55 UM no caso.

PRAZOS EXATOS, COMERCIAIS E BANCÁRIOS

A determinação do prazo considerado para uma operação financeira é algo fundamental para determinação exata dos valores devidos através do processo de capitalização.

Usualmente nos contratos associados à operações financeiras utilizam prazos que são qualificados de

- Exatos: quando os número de dias dos meses e do ano correspondem aos do ano civil.
- Comerciais: quando o mês tem sempre 30 dias e o ano tem um total de 360 dias.
- Bancários: quando o prazo da operação é determinado pelo número de dias correspondente ao do ano civil mas o período de tempo considerado para computo de frações da taxa de juros é determinado pelos prazos comerciais.

O leitor deve ter bastante cuidado em examinar a definição do tipo de prazo considerado no contrato associado à operação financeira em questão dada a influência direta deste sobre o computo do juro devido.

EMPRÉSTIMO E FINANCIAMENTO

Nesta seção apresentaremos alguns métodos comuns utilizados para o pagamento de dívidas que usualmente refletem empréstimos ou financiamentos. Esses métodos envolvem a aplicação prática de alguns conceitos que desenvolvemos nas seções anteriores.

Num contexto simples, uma dívida é constituída, de um lado, do recebimento de uma quantia S_0 pelo tomador do empréstimo no início do período inicial, chamado de período 0, quantia essa que chamaremos de capital inicial. De outro lado a dívida é caracterizada pelo método utilizado para reembolso desse valor ao provedor dos recursos através de prestações periódicas. Esse provedor dos recursos é usualmente uma instituição financeira como um banco, por exemplo.

Essas prestações são geralmente constituídas de duas parcelas: uma para restituição do capital inicial tomado, a qual é chamada de parcela de amortização, e outra para pagamento do juro sobre o saldo devedor da dívida.

Na prática, o ``custo'' do empréstimo ou financiamento pode incluir, além do juro para remuneração do capital, impostos, encargos diversos, seguro e outros custos indiretos (manutenção de um saldo médio em conta corrente, por exemplo). Pode, também, incluir algum processo para correção monetária do saldo devedor.

- O capital inicial, representado por C, indica o valor recebido pelo tomador do empréstimo no período 0 e representa o saldo devedor da dívida nesse período.
- O prazo da operação indica o número de períodos que decorrerão entre o recebimento do empréstimo e a extinção da dívida. Os recebimentos e pagamentos ocorrem no início de cada período.
- Um pagamento realizado no período i, representado por P_i, usualmente inclui uma parcela de amortização e uma parcela de juro sobre o saldo devedor.
- Uma parcela de amortização paga no período i, representada por A_i, indica o pagamento de parte do capital inicial reduzindo com isso o saldo devedor da dívida.
- Uma parcela de juro paga no período i, representada por J_i, indica o valor pago em uma prestação para remuneração do saldo devedor da dívida ao provedor dos recursos.

- O saldo devedor no período i, representado por S_i, é geralmente calculado recusivamente por
$$S_i = S_{i-1} - A_i,$$
onde S_0 representa o capital inicial C. Em alguns casos, o saldo devedor num dado período pode ser acrescido de encargos e correção monetária.
- A carência indica o prazo que decorrerá até o início do pagamento das parcelas de amortização. Uma carência de 2 períodos indica que início do pagamento das amortizações ocorrerá no período 3. Durante o período de carência pode ocorrer o pagamento de juro ou, alternativamente, o juro devido em cada período é capitalizado ao saldo devedor.

Toda a dívida formal contraída junto a uma instituição financeira usualmente envolve um contrato entre as partes envolvidas. Nesse contrato são definidos os procedimentos específicos que deverão ser utilizados para recebimentos e

pagamentos. As condições contratuais estabelecidas para definição do método a ser utilizado para pagamentos especificam detalhadamente a operação. Essas condições podem ser relativamente complexas em muitos casos.

- Taxa de juro contratual é a taxa que consta explicitamente no contrato para computo dos procedimentos utilizados para recebimentos e pagamentos. Nem sempre corresponde à taxa efetiva da operação.
- Taxa de juro efetiva nominal é a taxa efetivamente paga na operação e é idêntica ao valor j^* que resolve a equação:

$$S_0 - P_0 - \frac{P_1}{1+j^*} - \frac{P_2}{(1+j^*)^2} - \dots - \frac{P_n}{(1+j^*)^n} = 0,$$

onde S_0 é o capital inicial recebido e P_i, $i = 0, \dots, n$, são os pagamentos nos períodos 0 a n (ambos conhecidos). O valor j^* que resolve essa equação é usualmente chamado de taxa interna de retorno e raramente pode ser calculado analiticamente. Um valor aproximado para j^* pode ser obtido por tentativa e erro; para obtenção do valor exato é geralmente mais prático se recorrer à utilização de programas (planilhas eletrônicas por exemplo) ou calculadoras que internalizam métodos numéricos para obtenção da taxa interna de retorno. As prestações devem considerar os encargos diversos definidos em contrato.

Apresentaremos, a seguir, alguns métodos gerais, usualmente citados em contratos:

- **Método de amortização constante.**
- **Método francês.**
- **Método misto e misto generalizado.**
- **Amortização pela ``tabela Price''.**

- **Método americano.**
- **Método alemão.**

Ao final da descrição desses métodos apresentamos uma análise detalhada da questão de taxas contratuais e efetivas nos diversos métodos e princípios utilizados para incorporação de correção monetária nos métodos de pagamento.

Na seção que trata de estudos de caso, apresentaremos alguns exemplos que consideram situações mais realistas que incluem encargos, correção monetária e outras complexidades usualmente consideradas em situações práticas.

MÉTODO DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE

Nesse método de pagamento o princípio geral utilizado é a utilização de parcelas de amortização com valor constante. Essas parcelas são definidas pela divisão do saldo devedor inicial pelo número de períodos correspondente ao prazo da operação. O juro devido a cada período é calculado diretamente a partir do saldo devedor existente ao final do período anterior. As prestações, nesse caso, não tem valor constante, como ocorre no método francês que será visto na próxima seção.

No método de amortização constante, o valor da parcela de amortização de uma dívida cujo montante é S_0 é definida por

$$A_i = \frac{S_0}{n}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Os juros são calculados por

$$J_i = j \cdot S_{i-1},$$

onde

$$S_i = S_{i-1} - A_i.$$

As prestações devidas a cada período são computadas por

$$P_i = A_i + J_i.$$

Exemplo 20 – **(Venda de terreno – amortização constante)** – Um terreno de valor 120.000,00 UM está sendo vendido no ano 0 por um plano de pagamentos que inclui uma entrada de 20.000,00 UM e 5 prestações anuais para pagamento do saldo devedor, computadas pelo método de amortização constante, a uma taxa de juro anual de 10%. Qual será o valor da prestação nesse caso, se o primeiro pagamento se realizará no início do ano 1? Quais seriam os valores correspondentes à amortização do capital e ao juro contidos em cada prestação?

Solução: A planilha financeira que define os pagamentos nesse caso é apresentada na Tabela 1.5.

Tabela 1.3: Planilha financeira para financiamento por amortização constante.

Período i	Saldo Devedor S_i	Amortização A_i	Juro J_i	Prestação P_i
0	100.000,00			
1	80.000,00	20.000,00	10.000,00	30.000,00
2	60.000,00	20.000,00	8.000,00	28.000,00
3	40.000,00	20.000,00	6.000,00	26.000,00
4	20.000,00	20.000,00	4.000,00	24.000,00
5	0,00	20.000,00	2.000,00	22.000,00
Total		100.000,00		

No método de amortização constante, a existência de um prazo de carência de **k** períodos para início do pagamento das amortizações pode ser tratado de três formas alternativas.

Na primeira alternativa o pagamento das amortizações é postergado **k** períodos (carência) e durante esse período as prestações incluirão somente o juro sobre o saldo devedor existente. Uma descrição mais detalhada dessa alternativa é apresentada no quadro introduzido a seguir.

- Amortização constante com carência de k períodos e pagamento periódico de juros. As prestações do período 1 ao período $k+1$ envolveriam somente o juro:

$$P_i = j \cdot S_0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

As prestações, a partir do período $k+1$, incluiriam uma parcela de amortização constante e os juros calculados sobre o saldo devedor existente no final do período anterior:

$$P_i = A_i + J_i,$$

onde

$$A_i = \frac{S_0}{n} \quad \text{e} \quad J_i = j \cdot S_{i-1}.$$

Assim temos

$$S_i = S_0, \quad i = 0, \ldots, k,$$

$$S_i = S_{i-1} - A_i, \quad i = k+1, \ldots, k+n.$$

Exemplo 21 – Amortização constante com carência e juros periódicos – Considere o exemplo relativo à venda de terreno recém apresentado e assuma que nesse caso o saldo devedor, após o pagamento da entrada, será pago pelo método de amortização constante com uma carência de 2 anos para início do pagamento de amortizações do saldo devedor. Durante o período de carência o comprador do terreno pagará somente o juro sobre o saldo devedor. Construa a planilha financeira para esse caso.
Solução: A planilha financeira que define os pagamentos, nesse caso, é apresentada na Tabela 1.6.

Tabela 1.4: Amortização constante, carência de 2 períodos e juros periódicos.

Período i	Saldo Devedor S_i	Amortização A_i	Juro J_i	Prestação P_i
0	100.000,00			
1	100.000,00		10.000,00	10.000,00
2	100.000,00		10.000,00	10.000,00
3	80.000,00	20.000,00	10.000,00	30.000,00
4	60.000,00	20.000,00	8.000,00	28.000,00
5	40.000,00	20.000,00	6.000,00	26.000,00
6	20.000,00	20.000,00	4.000,00	24.000,00
7	0,00	20.000,00	2.000,00	22.000,00
Total		100.000,00		

Na segunda alternativa para inclusão de um prazo de carência de **k** períodos para início dos pagamentos, o juro é capitalizado ao saldo devedor durante a carência e pago integralmente no período que segue a esse prazo. Uma descrição mais detalhada dessa alternativa é apresentada no quadro introduzido a seguir.



ITEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

- **Amortização constante com carência de k períodos através de juros capitalizados pagos ao fim da carência.** Durante a carência o juro é capitalizado ao saldo devedor ao final de cada período, logo

$$S_i = S_{i-1}(1+j), \text{ e } P_i = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

No período $k+1$ o valor total dos juros acumulados nos períodos anteriores é pago juntamente com a primeira parcela fixa da amortização, logo

$$J_{k+1} = j \cdot S_k + S_k - S_0,$$

$$J_i = j \cdot S_{i-1}, \quad i = k+2, \cdot, k+n$$

$$A_i = \frac{S_0}{n}, \quad i = k+1, \cdots, k+n$$

$$P_i = A_i + J_i, \quad i = k+1, \cdots, k+n.$$

Finalmente,

$$S_i = S_{i-1} - A_i, \quad i = k+1, \ldots, k+n.$$

Exemplo 22 – (amortização constante com carência e juros capitalizados I) Considere o exemplo dessa seção relativo à venda de terreno e assuma que nesse caso o saldo devedor, após o pagamento da entrada, será pago pelo método de amortização constante com uma carência de 2 anos para início do pagamento de amortizações do saldo devedor. Durante o período de carência o comprador do terreno não pagará nenhuma prestação, sendo o juro capitalizado ao saldo devedor durante esse período e pago ao fim da carência. Construa a planilha financeira para esse caso.

Solução: A planilha financeira que define os pagamentos, nesse caso, é apresentada na Tabela 1.7.

Tabela 1.5: Amortização constante, carência de 2 períodos e juros capitalizados I.

Período i	Saldo Devedor S_i	Amortização A_i	Juro J_i	Prestação P_i
0	100.000,00			
1	110.000,00			
2	121.000,00			
3	80.000,00	20.000,00	33.100,00	53.100,00
4	60.000,00	20.000,00	8.000,00	28.000,00
5	40.000,00	20.000,00	6.000,00	26.000,00
6	20.000,00	20.000,00	4.000,00	24.000,00
7	0,00	20.000,00	2.000,00	22.000,00
Total		100.000,00		



ITEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

Na terceira alternativa para inclusão de um prazo de carência de **k** períodos para início dos pagamentos, o juro é capitalizado ao saldo devedor durante a carência incluído no saldo devedor para pagamento após a carência. Uma descrição mais detalhada dessa alternativa é apresentada no quadro introduzido a seguir.

- **Amortização constante com carência de k períodos através de juros capitalizados acrescidos ao saldo devedor.** Durante a carência os juros são capitalizados ao saldo devedor, de forma que

$$S_i = S_{i-1}(1+j) \quad \text{e} \quad P_i = 0, \text{ para } \quad i = 1, \ldots, k.$$

A parcela fixa de amortização é calculada por

$$A_i = \frac{S_k(1+j)}{n}, \quad i = k+1, \ldots, k+n,$$

ou seja, a partir do saldo devedor acrescido dos juros capitalizados até o período $k+1$. No período $k+1$ o valor do juro a ser pago é considerado zero $(J_{k+1} = 0)$ e a prestação devida é

$$P_{k+1} = A_{k+1}.$$

O saldo devedor no período $k+1$ e períodos subsequentes é definido por

$$S_{k+1} = S_k(1+j) - A_{k+1} \text{ e } S_i = S_{i-1} - A_i, \; i = k+2, \ldots, k+n.$$

As parcelas de juro são definidas por

$$J_i = j \cdot S_{i-1}, \quad i = k+2, \ldots, k+n$$

e as prestações por

$$P_i = A_i + J_i, \quad i = k+2, \ldots, k+n.$$

MÉTODO FRANCÊS

O método francês em lugar de utilizar parcelas de amortização constantes, como no método de amortização constante descrito na seção anterior, utiliza prestações constantes. Esse método é formalmente introduzido no quadro apresentado a seguir.



O método francês de amortização de uma dívida cujo valor inicial no período 0 é representado por S_0, em n períodos, à taxa de juro j, 'e realizado por n prestações fixas de valor P, pagas no início dos períodos 1 a n, de forma que o valor presente do fluxo de prestações encontrado utilizando-se a taxa de juro j seja igual a S_0. Do ponto de vista prático o valor da prestação fixa P seria o valor de P que soluciona a equação:

$$S_0 = \underbrace{\frac{P}{(1+j)} + \frac{P}{(1+j)^2} + \ldots + \frac{P}{(1+j)^n}}_{n \text{ períodos}},$$

ou agrupando termos e isolando P,

$$P = \frac{S_0}{\frac{1}{(1+j)} + \frac{1}{(1+j)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+j)^n}}$$

onde S_0, j e n são conhecidos.

No método francês de amortização, a expressão para o valor fixo da prestação **P** depende do computo do valor da série:

$$s = \frac{1}{(1+j)} + \frac{1}{(1+j)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+j)^n}$$

que é uma função de **j**, a taxa de juros considerada. Se o número de termos dessa série for grande, o cálculo ``braçal'' do valor de **s** seria tedioso. Se observarmos, contudo, que

$$s = x + x^2 + \ldots + x^n,$$

onde $x = \frac{1}{(1+j)}$, podemos achar o valor geral de **S** em função de **x** usando o seguinte truque: se subtrairmos **s** de **s** multiplicado por **x** chegamos a



ITEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

$$s - s \times x = x - x^{n+1}$$

ou

$$s = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Substituindo $x = \frac{1}{(1+j)}$ na expressão que define **P** chegamos a

$$P = S_0 \times \frac{j}{1 - (1+j)^{-n}}.$$

No <u>método francês</u> uma dívida de montante S_0 no período inicial é amortizada por n prestações de valor P determinado por

$$P = S_0 \times \frac{j}{1 - (1+j)^{-n}}.$$

quando o primeiro pagamento ocorre no início do período 1. Quando o primeiro pagamento ocorre início do período 0, o valor de P é determinado por

$$P = S_0 \times \frac{j}{(1+j)[1 - (1+j)^{-n}]},$$

A dedução desse último resultado pode ser realizada através de argumentos similares aos usados para desenvolver o primeiro caso.


ITEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

Exemplo 24 – (Valor presente de prestações) – Um automóvel está sendo vendido por 5 prestações mensais de 1.000,00 UM com a primeira prestação desembolsada no início do período 1. Se a taxa de juro de mercado é de 5% qual seria o valor do automóvel no momento da realização do negócio?

Solução: Nesse caso podemos usar as noções refletidas no método francês para encontrar o valor de S_0 na fórmula apresentada, dado que temos j e n, usando

$$S_0 = 1.000{,}00 \times \frac{1 - 1,05^{-5}}{0,05} = 4.329{,}48.$$

Esse resultado indica que o valor do automóvel seria de 4.329,48 UM nas condições propostas.



ITEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

No método francês a parcela correspondente à amortização do capital contida em cada prestação é obtida pela diferença entre o valor fixo da prestação, obtido pelos procedimentos já descritos, e o juro computado sobre o saldo devedor no início do período em questão. Ou seja

$$A_i = P - j \cdot S_{i-1},$$

onde A_i é a parcela de amortização no período i, P é o valor fixo da prestação calculado pelo método francês e S_i é o saldo devedor existente ao final do período i. O novo saldo devedor é computado por

$$S_i = S_{i-1} - A_i.$$

A parcela correspondente ao juro em cada período i é simplesmente

$$J_i = j \cdot S_{i-1}.$$

Exemplo 25 – (**Venda de terreno – método francês**) – Um terreno de valor 120.000,00 UM está sendo vendido no ano 0, por um plano de pagamentos que inclui uma entrada de 20.000,00 UM e 5 prestações anuais para pagamento do saldo devedor, computadas pelo método francês, a uma taxa de juro anual de 10%. Qual será o valor da prestação nesse caso, se o primeiro pagamento se realizará no início do ano 1? Quais seriam os valores correspondentes à amortização do capital e ao juro contidos em cada prestação?

Solução: O valor do saldo devedor considerado para cômputo das prestações será de 100.000,00. Pela aplicação direta da fórmula chegamos a

$$P = 100.000,00 \times \frac{0,10}{1 - 1,1^{-5}} = 26.379,75$$

Ou seja, o investidor terá que pagar 5 prestações anuais de 26.379,75 UM. A "planilha financeira" que descreve a composição dos pagamentos em termos de amortizações e juros é apresentada na Tabela 1.9.

Tabela 1.7: Planilha financeira para financiamento pelo método francês.

Período i	Saldo Devedor S_i	Amortização A_i	Juro J_i	Prestação P_i
0	100.000,00			
1	83.620,25	16.379,75	10.000,00	26.379,75
2	65.602,53	18.017,73	8.362,03	26.379,75
3	45.783,03	19.819,50	6.560,25	26.379,75
4	23.981,59	21.801,45	4.578,30	26.379,75
5	0,00	23.981,59	2.398,16	26.379,75
Total		100.000,00		

A consideração de períodos de carência não oferece nenhuma dificuldade para aplicação do método francês. Nesse caso, consideraremos duas situações. No primeiros caso, para uma carência de **k** períodos, os pagamentos durante a carência incluirão somente o juro sobre o saldo devedor. Após os **k** períodos de carência, tudo se processará de forma idêntica à aplicação do método francês sem consideração de carência.



Exemplo 26 – (**método francês com carência e pagamento de juros**) – Considere o mesmo problema relacionado à venda de um terreno descrito anteriormente. Se a carência é de 2 anos para início dos pagamentos (método francês) e durante esse período serão pagos juros sobre o saldo devedor, apresente a planilha financeira correspondente a essa operação.

Solução: A "planilha financeira" que descreve a composição dos pagamentos em termos de amortizações e juros é apresentada na Tabela 1.10.

Tabela 1.8: Método francês, com carência de 2 períodos e juros periódicos.

Período i	Saldo Devedor S_i	Amortização A_i	Juro J_i	Prestação P_i
0	100.000,00			
1	100.000,00		10.000,00	10.000,00
2	100.000,00		10.000,00	10.000,00
3	83.620,25	16.379,75	10.000,00	26.379,75
4	65.602,53	18.017,73	8.362,03	26.379,75
5	45.783,03	19.819,50	6.560,25	26.379,75
6	23.981,58	21.801,45	4.578,30	26.379,75
7	0,00	23.981,58	2.398,16	26.379,75
Total		100.000,00		

Alternativamente, se nenhum pagamento é feito durante os períodos de carência, o juro devido a cada período é capitalizado ao saldo devedor. O valor da prestação constante é então calculada sobre o saldo devedor, que nesse caso inclui os juros capitalizados a cada período.


I-TEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

Exemplo 27 – (método francês com carência e capitalização de juros) – Considere o mesmo problema relacionado à venda de um terreno descrito anteriormente. Se a carência é de 2 anos para início dos pagamentos (método francês) e durante esse período o juro será capitalizado no saldo devedor, apresente a planilha financeira correspondente a essa operação.

Solução: A "planilha financeira" que descreve a composição dos pagamentos em termos de amortizações e juros é apresentada na Tabela 1.11.

Tabela 1.9: Método francês, com carência de 2 períodos e juros capitalizados.

Período i	Saldo Devedor S_i	Amortização A_i	Juro J_i	Prestação P_i
0	100.000,00			
1	110.000,00			
2	121.000,00			
3	101.180,50	19.819,50	12.100,00	31.919,50
4	79.379,05	21.801,45	10.118,05	31.919,50
5	55.397,45	23.981,60	7.937,90	31.919,50
6	29.017,70	26.379,75	5.539,75	31.919,50
7	0,00	29.017,70	2.901,80	31.919,50
Total		100.000,00		

MÉTODO MISTO E MISTO GENERALIZADO

No método misto, que é utilizado no Brasil pelo Sistema Financeiro de Habitação, as amortizações, juros e prestações são obtidas a partir da média aritmética entre os valores computados pelo método de amortização constante e pelo método francês.

A obtenção da planilha financeira para o método misto pode ser realizada a partir da planilhas calculadas utilizando-se o método de amortização constante e o método francês. Cada célula da planilha do método misto é calculada pela média aritmética das células correspondentes das outras 2 planilhas. O próximo exemplo ilustra o procedimento descrito acima.



Exemplo 28 – (Venda de terreno – método misto) – Um terreno de valor 120.000,00 UM está sendo vendido no ano 0, por um plano de pagamentos que inclui uma entrada de 20.000,00 UM e 5 prestações anuais para pagamento do saldo devedor, computadas pelo método francês, a uma taxa de juro anual de 10%. Calcule a planilha financeira com os pagamentos devidos, amortizações e juros pelo método misto.

Solução: O valor do saldo devedor considerado para cômputo das prestações será de 100.000,00. A "planilha financeira" apresentada na Tabela 1.12 descreve a composição dos pagamentos em termos de amortizações e juros e foi computada pela média aritmética dos valores das células correspondentes computadas anteriormente na Tabela 1.9 e Tabela 1.5, que correspondem ao mesmo caso computado, respectivamente, pelo método francês e pelo método de amortização constante.

Tabela 1.10: Planilha financeira para financiamento pelo método misto.

Período i	Saldo Devedor S_i	Amortização A_i	Juro J_i	Prestação P_i
0	100.000,00			
1	81.810,13	18.189,88	10.000,00	28.189,88
2	62.801,26	19.008,87	8.181,02	27.189,88
3	42.891,51	19.909,75	6.280,13	26.189,88
4	21.990,79	20.900,72	4.289,15	25.189,88
5	0,00	21.990.80	2.199,08	24.189,88
Total		100.000,00		

O método misto torna as prestações um pouco mais leves no início dos pagamentos e um pouco mais pesadas no final dos pagamentos quando comparadas às prestações derivadas do método de amortização constante.

Se em lugar de uma média aritmética simples utilizarmos um fator de ponderação α , um número real qualquer, para cálculo de uma média ponderada entre o método francês e o método de amortização constante, podemos gerar uma família de métodos mistos que é dependente do valor de α. A esse método chamaremos método misto generalizado. As prestações, amortizações e juros nesse caso seriam calculados a partir do uso de αcomo fator de ponderação para as células das planilhas dos dois métodos utilizando:

$$C_{ij}^{m} = \alpha \cdot C_{ij}^{f} + (1-\alpha) \cdot C_{ij}^{c},$$

onde, C^m_{ij} é a célula da linha **i** e coluna **j** da planilha financeira do método misto e C^f_{ij} e C^c_{ij} são as células correspondentes nas planilhas do método francês e do método de amortização constante. O caso mais comum considera

$$\alpha = 0,5$$

e corresponde à média aritmética entre os dois métodos. O caso em que $\alpha = 1$ corresponde ao método francês e o caso em que $\alpha = 0$ ao método de amortização constante.

Num resultado que demonstrado nas próximas seções, verifica-se que a taxa de juros efetiva e contratual no sistema misto generalizado é sempre igual a taxa de juro contratual e efetiva **j** que foi utilizada para elaboração das planilhas para o método de amortização constante e para o método francês, para qualquer valor de α utilizado na ponderação.

Quando $0 \leq \alpha \leq 1$ os valores das prestações serão sempre decrescentes com a evolução dos períodos ou iguais (no caso em que $\alpha = 1$). Se $\alpha > 1$ as prestações serão crescentes em valor. No exemplo introduzido a seguir mostramos a evolução das prestações quando $\alpha = 2$.



I-TEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

Exemplo 29 – (Venda de terreno – método misto generalizado) – Considere, usando os dados do último exemplo, que em lugar do método misto, estamos utilizando agora o método misto generalizado, com $\alpha = 3$ como fator de ponderação entre o método francês e método de amortização constante. Apresente a planilha financeira para essa situação.

Solução: A "planilha financeira" apresentada na Tabela 1.13 descreve a composição dos pagamentos em termos de amortizações e juros e foi computada pela ponderação dos valores das células correspondentes computadas anteriormente na Tabela 1.9 e Tabela 1.5, que correspondem ao mesmo caso computado, respectivamente, pelo método francês e pelo método de amortização constante. O leitor pode verificar

Tabela 1.11: Planilha financeira para financiamento pelo método misto generalizado.

Período i	Saldo Devedor S_i	Amortização A_i	Juro J_i	Prestação P_i
0	100.000,00			
1	90.860,75	9.139,25	10.000,00	19.139,25
2	76.807,58	14.053,18	9.086,08	23.139,25
3	57.349,08	19.458,50	7.680,76	27.139,25
4	31.944,74	25.404,34	5.734,91	31.139,25
5	0,00	31.944,78	3.194,47	35.139,25
Total		100.000,00		

que a taxa de juros efetiva nesse caso também é igual a 10%, a mesma taxa utilizada para o cálculo das planilhas pelos métodos francês e amortização constante.

Tabela ``Price''

Introduziremos a seguir o método de amortização pela ``tabela Price'' que é uma especialização do método francês para o caso em que definimos uma taxa de juro anual com capitalização mensal.

A amortização de uma dívida pela "tabela Price" nada mais é que uma amortização pelo método francês que envolve a definição de juros anuais com capitalização mensal, de forma que nesse caso

$$P = V_0 \times \frac{\frac{j}{12}}{1-(1+\frac{j}{12})^{-12n}}.$$

Na "tabela" é apresentado o valor de k para j e n dados, onde

$$k = \frac{\frac{j}{12}}{1-(1+\frac{j}{12})^{-12n}},$$

com esse k podemos facilmente computar os valores de P para um dado V_0. Com as calculadoras eletrônicas financeiras ou programas em computadores o uso de tabelas já não é algo tão necessário como há anos atrás.

Exemplo 30 – Venda de casa pela tabela Price – Deseja-se determinar o valor da prestação mensal para amortização de uma dívida envolvendo a venda de uma casa cujo valor é de 10000 UM considerando-se um prazo de 10 anos e juros de 10% pela tabela Price.

Solução: Em uma "tabela Price" poderiamos verificar o valor do k correspondente a

$$\frac{\frac{j}{12}}{1-(1+\frac{j}{12})^{-12n}}.$$

onde $j = 0{,}10$ e $n = 10$ ou poderiamos simplesmente calcular esse valor usando uma calculadora. De qualquer forma chegariamos a $k = 0{,}0132151$ e a prestação seria definida por

$$P = 10000 \times 0{,}0132151 = 132{,}15$$

ou seja 132,15 UM por mês.

MÉTODO AMERICANO

No método americano, que é usado freqüentemente em outros países, o tomador do empréstimo devolve o capital inicial em uma só parcela de amortização no


ITEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

período final da operação. As prestações periódicas consideram um juro simples calculado sobre o capital inicial. É usual que o tomador do empréstimo constitua um fundo de amortização destinado à reposição do valor integral do capital inicial ao final do empréstimo.

No método americano de amortização paga-se em cada período uma prestação constante que envolve o juro simples sobre o capital inicial emprestado. O capital inicial é retornado integralmente no último período da operação. Usualmente, o tomador do empréstimo destina uma quantia constante para formação de um fundo de amortização ("sinking fund") para pagamento do capital inicial ao final da operação. O valor da prestação será determinado nesse caso por

$$P_i = S_0 \times j_1, \; i = 1, \ldots, n-1$$

$$P_n = S_0 \times j_i + S_0,$$

onde j_1 é a taxa associada à dívida. A parcela periódica para formação do fundo que resultará no valor S_0 no período n, considerando uma taxa de juros j_2, é definida por:

$$PS_i = \frac{S_0}{\frac{(1+j_2)^n - 1}{j_2}}.$$

A ideia é que ao final dos n períodos o valor acumulado no fundo de amortização seja suficiente para reposição do capital inicial que constitui a dívida.

O próximo exemplo ilustra o uso do método americano para amortização de um empréstimo.

Exemplo 31 – Empréstimo pelo método americano – Uma quantia de 5.000 UM foi emprestada no período 0 por um período de 5 anos. O pagamento da dívida se processará pelo método americano onde $j_1 = 0{,}05$ é a taxa de juro considerada para o empréstimo e $j_2 = 0{,}07$ é a taxa de juro para capitalização do fundo de amortização. Quais são os valores das prestações anuais e das parcelas para formação do fundo de amortização?

Solução: As parcelas correspondente ao juro anual seriam

$$5.000 \times 0{,}05 = 250{,}00$$

e seriam paga nos períodos 1 a 5. No perído 5 o capital inicial de 5.000 UM seria reembolsado juntamente com o juro devido. A parcela anual correspondente ao fundo de amortização seria de

$$\frac{5.000}{\frac{(1+0{,}07)^n-1}{0{,}07}} = 869{,}45.$$

É fácil o leitor perceber que o valor futuro no período 5 (período final) das prestações de 869,45 UM aplicadas convenientemente à taxa de juro de 7% será de 5.000 UM, o valor do capital inicial emprestado.


ITEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

Exemplo 32 – **(Venda de terreno – método americano)** – Um terreno de valor 120.000,00 UM está sendo vendido no ano 0, por um plano de pagamentos que inclui uma entrada de 20.000,00 UM. O saldo de 100.000,00 UM será financiado pelo método americano em 5 anos a uma taxa de juro anual de 10%. Calcule a planilha financeira com os pagamentos devidos, amortizações e juros pelo método americano. Inclua na tabela uma parcela anual para constituição de um fundo de amortização à taxa de 7% ao ano.

Solução: A "planilha financeira" apresentada na Tabela 1.14 descreve a composição dos pagamentos em termos de amortizações, juros e parcela para constituição do fundo de amortização. Pagando 27.389,07 UM por ano (o juro anual mais a parcela para a

Tabela 1.12: Planilha financeira para financiamento pelo método americano.

Período i	Saldo Devedor S_i	Amortização A_i	Juro J_i	Prestação P_i	Fundo PS_i
0	100.000,00				
1	100.000,00		10.000,00	10.000,00	17.389,07
2	100.000,00		10.000,00	10.000,00	17.389,07
3	100.000,00		10.000,00	10.000,00	17.389,07
4	100.000,00		10.000,00	10.000,00	17.389,07
5	0,00	100.000,00	10.000,00	110.000,00	17.389,07
Total		100.000,00			

constituição do "sinking fund") o tomador do empréstimo teria condições de restituir o capital inicial de 100.000,00 ao final da operação.

MÉTODO ALEMÃO

No método alemão as prestações são sempre idênticas, como ocorre no método francês. A diferença fundamental entre esses dois métodos está no fato de que no método alemão o juro sobre o saldo devedor é pago de forma antecipada. A quantia inicial recebida pelo tomador do empréstimo no período 0, nesse caso, já vem deduzida do juro antecipado correspondente a esse período. Nos métodos discutidos nas seções anteriores esse mesmo juro só seria pago no início do período 1.

ITEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

No método alemão para uma dívida inicial de valor S_0 contraida à taxa de juro j por n períodos o tomador do empréstimo receberá no período 0 a quantia

$$S_0 \cdot (1-j)$$

que é o valor emprestado já descontado do juro antecipado correspondente ao primeiro período. O valor da parcela de amortização para o período 1 será calculada por

$$A_1 = S_0 \times \frac{j}{(1-j) \cdot [(\frac{1}{1-j})^n - 1]}.$$

Nos períodos subsequentes as parcelas de amortização são definidas por

$$A_i = \frac{1}{1-j} \times A_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n.$$

O valor total de cada prestação, que é sempre idêntico a cada período, inclui o juro antecipado sobre o saldo devedor mais a parcela de amortização, sendo obtido por

$$P_i = A_i + j \times (S_0 - \sum_{t=1}^{i} A_t), \quad i = 1, \ldots, n$$

onde $j \times (S_0 - \sum_{t=1}^{i} A_t)$ corresponde ao juro antecipado pago sobre o saldo devedor e a_i corresponde à parcela de amortização. Como as prestações são sempre idênticas basta calcularmos

$$P_1 = A_1 + j \times (S_0 - A_1),$$

e tomarmos o valor de P_1 como o valor das prestações restantes.

No início de cada período **i** ($i = 1, \ldots, n$) o tomador do empréstimo deve pagar P_i que inclui uma parte do capital inicial e juros antecipados sobre o saldo devedor existente. A dificuldade maior nesse caso é a obtenção de P_i de modo que $P_1 = P_2 = \ldots = P_n$. Se representarmos por A_i a parcela para amortização do capital devemos ter:

- $P_1 = A_1 - j \times (S_0 - A_1)$
- $P_2 = A_2 - j \times (S_0 - A_1 - A_2)$
- $\vdots$
- $P_n = A_n - j \times (S_0 - A_1 - A_2 - \ldots - A_n)$

mas, no último período (**n**) o saldo devedor será zero dado que

$$S_0 - A_1 - A_2 - \ldots - A_n = 0$$

por definição de A_i que é exatamente a parcela de amortização do capital e com isso temos que a última prestação será definida por

$$P_n = A_n.$$

Como os valores de P_i devem ser os mesmos para $i = 1, \ldots, n$ podemos igualar as definições de P_n e P_{n-1} para chegarmos a

$$A_n = A_{n-1} + j \times (S_0 - A_1 - \ldots - A_{n-1})$$

mas como $S_0 - A_1 - \ldots - A_{n-1} = A_n$, temos

$$A_n = A_{n-1} + j \times A_n \quad \text{ou} \quad A_n = \frac{1}{1-j} \times A_{n-1}.$$

Se resolvermos recursivamente para $P_{n-2}, \ldots, P_1$, usando o mesmo raciocínio, chegaremos a relação geral

$$A_i = \frac{1}{1-j} \times A_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n.$$

Com essa última relação podemos em princípio conhecer qualquer valor A_i em função de A_1. O problema no momento é exatamente acharmos o valor de A_1. Como temos



$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

podemos substituir A_2 a A_n usando a última relação chegando a

$$S_0 = A_1 + \frac{A_1}{1-j} + \ldots + \frac{A_1}{(1-j)^{n-1}}$$

ou

$$S_0 = A_1 \times (1 + \frac{1}{1-j} + \ldots + \frac{1}{(1-j)^{n-1}})$$

mas o termo do parênteses é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{1-j}$ logo

$$S_0 = A_1 \times \frac{1 - (\frac{1}{1-j})^n}{1 - \frac{1}{1-j}} = A_1 \cdot \frac{(1-j) \cdot [(\frac{1}{1-j})^n - 1]}{j}.$$

Como sabemos o valor de S_0 podemos encontrar A_1 por

$$A_1 = S_0 \times \frac{j}{(1-j) \cdot [(\frac{1}{1-j})^n - 1]}$$

e com isso podemos resolver recursivamente os valores dos outros períodos por

$$A_i = \frac{1}{1-j} \times A_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n.$$

Finalmente, com esses últimos resultados, podemos calcular os valores das parcelas $P_1, \ldots, P_n$ usando

$$P_i = A_i + j \times (S_0 - \sum_{t=1}^{i} A_t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

O uso do método alemão de amortização é ilustrado pelo próximo exemplo.



ITEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

Exemplo 33 – Empréstimo pelo método alemão – Uma quantia de 5.000 UM foi emprestada por um período de 5 anos pelo método alemão a uma taxa de juro de 5% ao ano. Descreva o processo de amortização dessa dívida. Solução: O emprestador no início do primeiro ano receberá o valor de 4.750 UM que seria o valor da dívida, já descontada do juro correspondente ao primeiro ano calculado por

$$5.000 \times 0{,}05.$$

A parcela de amortização a ser paga ao final do primeiro ano, necessária para o cálculo da prestação é definida por

$$A_1 = 5.000 \cdot \frac{0{,}05}{(1-0{,}05)\cdot[(\frac{1}{1-0{,}05})^5 - 1]} = 900{,}13.$$

Logo, ao final do primeiro ano a prestação seria de

$$P_1 = 900{,}13 - 0{,}05 \times (5.000 - 900{,}13) = 1.105{,}12.$$

Como pelo método alemão as prestações são sempre iguais as prestações a serem pagas ao final do segundo, terceiro, quarto e quinto anos seriam também correspondentes a 1.105,12 UM.

Exemplo 34 – (Venda de terreno – método alemão) – Um terreno de valor 100.000,00 UM está sendo vendido. O saldo de 100.000,00 UM deverá ser pago à vista ao dono do terreno e para isso o comprador precisa tomar um empréstimo no montante desse valor. Se o empréstimo é realizado pelo método alemão por um prazo de 5 anos a uma taxa de juro anual de 10% qual seria a planilha financeira correspondente a essa operação?

Solução: A "planilha financeira" apresentada na Tabela 1.15 descreve a composição dos pagamentos em termos de amortizações, juros e parcela para constituição do fundo de amortização. Para receber 100.000,00 UM para pagamento do terreno é necessário que um financiamento de 111.111,11 UM dado que o juro antecipado de 11.111,11 UM será descontado no recebimento do capital inicial.

Tabela 1.13: Planilha financeira para financiamento pelo método alemão.

Período i	Saldo Devedor S_i	Amortização A_i	Juro J_i	Prestação P_i
0	111.111,11		11.111,11	11.111,11
1	93.309,35	17.801,76	9.330,94	27.132,70
2	73.529,62	19.779,73	7.352,97	27.132,70
3	51.552,14	21.977,48	5.155,22	27.132,70
4	27.132,71	24.419,42	2.713,28	27.132,70
5	0,02	27.132,69	0,01	27.132,70
Total		111.111,11		

É importante salientar que no método alemão a taxa de juro efetiva é superior à taxa de juro contratual da operação dado que o pagamento do juro é antecipado. No último exemplo a taxa de juro contratual era 10% mas a taxa de juro efetiva seria de aproximadamente 11,11%. A taxa efetiva, nesse caso, é computada pela taxa interna de retorno da operação em que se recebe 100.000,00 no período 0 com a restituição dada em 5 pagamentos iguais de 27.132,70 UM nos períodos 1 a 5.

No método alemão a taxa efetiva j^* é sempre superior à taxa contratual j e é dada por:

$$j^* = \frac{1}{1-j} - 1.$$


I-TEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

Avaliação de alternativas de investimento em uma economia estável

Na seção em que discutimos a transformação de valores nominais em valores reais estávamos preocupados em eliminar os efeitos da inflação em séries de valores monetários, para fins de análise e comparação. Quando analisamos uma série extensa de valores no tempo, algo comum em muitas operações financeiras, usualmente desejamos que os valores dessa série estejam corrigidos para valores reais (de um certa data de interesse). Isso tenta garantir que a quantidade de mercadorias comprada com 100 UM disponíveis num dado período corresponde a exatamente a mesma quantidade de mercadorias comprada com 100 UM disponíveis em outro período. Isso não seria possível se tivéssemos utilizando valores nominais na análise pois a inflação nos reduziria o valor do dinheiro na troca por mercadorias.

Nesta seção estamos preocupados com outro problema relacionado a determinação do valor do dinheiro no tempo. Queremos saber agora qual o valor hoje de uma quantia em UM disponível em uma data futura. Para todos os efeitos, nossa discussão considerará que todos os valores utilizados já se encontram corrigidos para valores reais.

Suponha que você tem uma dívida de 100 UM a ser paga dentro de um mês e que a taxa de juro que o banco está oferecendo para investimento por um mês é de 5%.

- Qual seria o valor dessas 100 UM hoje, considerando um cenário de inflação zero?

Como a taxa de juro é de 5% ao mês, poderíamos aplicar nesse investimento oferecido pelo banco a quantia de 95,24 UM para depois de um mês receber 100 UM e pagar a dívida contraída, dado que

$$100 = 95{,}24 \times 1{,}05.$$

Essa quantia de 95,24 UM, se disponível hoje, é chamada de valor presente ou valor atual de 100 UM disponíveis em 1 mês, considerando uma taxa de juro de 5%. Alternativamente, poderíamos dizer que 100 UM em um mês é o valor futuro de 95,24 UM disponíveis hoje.

Para realizar essa operação, nos privaríamos do consumo propiciado por 95,24 UM hoje para receber 100 UM dentro de um mês. Ou seja 100 UM disponíveis dentro de um mês valem somente 95,24 UM hoje em termos de consumo em decorrência da alternativa de investimento oferecida pelo banco. Isso não significa que 100 UM disponíveis dentro de um mês possam comprar mais mercadorias que 100 UM comprariam hoje (se a inflação fosse zero). Significa somente que o valor de 100


I-TEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

UM disponíveis dentro de 1 mês, no dia de hoje, valeria somente 95,24 UM. Usando o mesmo raciocínio, 100 UM disponíveis em 2 meses valeriam somente 90,70 UM hoje pois esse valor aplicado a 5% ao mês nos renderia 100 UM ao final de 2 meses. De forma análoga poderíamos dizer que o valor futuro de 90,70 em 2 meses seria de 100 UM.

Na grande maioria das operações financeiras usuais é necessário que comparemos valores reais disponíveis em momentos diferentes no tempo e para isso precisamos utilizar a noção de valor presente e valor futuro que introduzimos informalmente no exemplo do último parágrafo.

Valor presente e valor futuro

O valor presente ou valor atual, representado por VP, de um valor futuro V_n disponível no período n é determinado por

$$VP = \frac{V_n}{(1+j)^n},$$

onde j representa a taxa de juro de mercado disponível para o investidor que é usualmente chamada nesses casos de custo de oportunidade do capital.

Comumente desejamos saber o valor presente de um fluxo de recebimentos ou pagamentos considerando uma determinada taxa de juro **j**.

Um fluxo de recebimentos ou pagamentos é uma sequência de recebimentos ou pagamentos realizados ao longo de diversos períodos.

Exemplo 12 *quanto corresponderia hoje uma quantia de 100 UM que será recebida daqui a três meses, se a taxa de juros disponível para o investidor é de 15% ao mês?*
Solução: Pela aplicação direta da fórmula apropriada teriamos:

$$VP = \frac{100}{(1+0{,}15)^3} = 65,75.$$

Ou seja, com 65,75 UM poderiamos obter 100 UM dentro de 3 meses aplicando o dinheiro à 15% ao mes.

Da mesma forma que definimos o valor presente como o valor no período 0 de uma quantia disponível no período 1, podemos também, utilizando raciocínio similar,

definir o valor futuro de como o valor no período **n** de uma quantia disponível no período 0.

O valor futuro, representado por VF, de uma quantia V_0 disponível no período 0, é determinado por

$$VF = V_0 \cdot (1+j)^n,$$

onde j representa a taxa de juro de mercado.

Podemos formalizar a noção de valor presente para o caso de um fluxo de pagamentos ou recebimentos por

O valor presente V_0 de um fluxo de pagamentos e/ou recebimentos definido por

$$V_0, V_1, V_2, \ldots, V_n$$

é dado por

$$VP = \frac{V_0}{(1+j)^0} + \frac{V_1}{(1+j)^1} + \ldots + \frac{V_n}{(1+j)^n}.$$

Os recebimentos são usualmente representados por valores positivos e os pagamentos por valores negativos. O valor futuro no período n é, nessa situação geral, determinado por:

$$VF = V_0 \cdot (1+j)^n + V_1 \cdot (1+j)^{n-1} + \ldots + V_n.$$

TAXA INTERNA DE RETORNO

Em muitas situações práticas (investimentos e empréstimos por exemplo), é necessário o cômputo da taxa de juro j^* que ao ser usada para obtenção do valor presente de um fluxo de recebimentos ou de pagamentos, torna esse valor igual a zero. A taxa de juro que apresenta essa propriedade com relação a um dado fluxo de recebimentos e pagamentos é chamada taxa interna de retorno desse fluxo.

A taxa interna de retorno, representada por j^*, é a taxa de juro que torna o valor presente ou valor futuro de um fluxo de recebimentos e pagamentos igual a zero, ou seja, j^* é o valor que resolve a equação

$$V_0 + \frac{V_1}{1+j^*} + \frac{V_2}{(1+j^*)^2} + \ldots + \frac{V_n}{(1+j^*)^n} = 0,$$

onde $V_i, i = 0, \ldots, n$ representa o fluxo (conhecido) de recebimentos e pagamentos. Essa equação é um polinômio de grau n que pode ser representado por

$$V_0 + V_1 \cdot x + V_2 \cdot x^2 + \ldots + V_n \cdot x^n = 0,$$

onde

$$x = \frac{1}{1+j^*}.$$

Quando $n = 1$ ou $n = 2$ o valor de j^* pode ser facilmente encontrado pela solução de uma equação de primeiro ou segundo grau. Quando $n > 2$ a solução aproximada pode ser encontrada por tentativa e erro ou pela utilização de métodos numéricos em geral utilizados por programas ou calculadoras financeiras. Deve existir ao menos uma mudança de sinal no fluxo de recebimentos e pagamentos para que exista uma solução para a equação que faça sentido. Isso não garante, contudo, que a solução seja única ou que exista no domínio dos números reais. Existem soluções analíticas para equações desse tipo até grau 4 mas são pouco utilizadas na prática.

Alguns exemplos e estudos de caso:

Exemplo 13 – Qual é o valor presente de um investimento que envolve o pagamento de 100 UM no período 0 e o recebimento de duas parcelas de 60 UM nos períodos 1 e 2, se a taxa de juro de mercado é de 10%? Qual a taxa interna de retorno desse investimento?

Solução:

- O valor presente nesse caso é definido por

$$VP = -100 + \frac{60}{1+0{,}10} + \frac{60}{(1+0{,}10)^2} = 4{,}13\text{UM}.$$

- Esse exemplo ilustra um dos raros casos em que podemos encontrar a taxa interna de retorno por métodos analíticos, resolvendo uma equação de segundo grau. A taxa interna de retorno, nesse caso, é o valor de j^* que soluciona

$$-100 + \frac{60}{1+j^*} + \frac{60}{(1+j^*)^2} = 0.$$

Se substituirmos $\frac{1}{1+j}$ por x chegamos a equação do segundo grau definida por

$$-100 + 60x + 60x^2 = 0,$$

cuja solução é dada por:

$$x^* = \frac{-60 + \sqrt{60^2 + 4 \cdot 60 \cdot 100}}{2 \cdot 60} = 0,8844,$$

(a outra solução é negativa e não faz sentido nesse caso). A solução $x^* = 0,8844$ pode ser utilizada para obtenção de j^* por

$$j^* = \frac{1}{0,8844} - 1 = 0,1307,$$

logo, a taxa interna de retorno é 13,07% nesse caso.



ITEC, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS
Rua Itaja Qd 15 Lt 03 Verdes Mares II Goianira GO
62) 99670-7207 TIM / 99351-7207 Claro
CNPJ: 23.843.331/0001-99

Exemplo 14 – Qual é o valor presente de um investimento que envolve o pagamento de 1.000 UM no início do período 0 e recebimento de 600 UM no início dos períodos 1, 2 e 3, se a taxa de juro de mercado considerada é de 5%? Qual o valor futuro do investimento no período 3? Qual a taxa interna de retorno do investimento?

Solução:

- O valor presente do investimento é determinado por

$$VP = -1.000,00 + \frac{600}{1+0,05} + \frac{600}{(1+0,05)^2} + \frac{600}{(1+0,05)^3} = 633,95\text{UM}.$$

- O valor futuro no período 3 é determinado por

$$VF = -1.000 \cdot (1+0,05)^3 + 600 \cdot (1+0,05)^2 + 600 \cdot (1+0,05) + 600 = 733,88.$$

  O valor futuro computado de 733,88 UM é exatamente o valor futuro no período 3 das 633,95 UM recebidas no período 0.

- A taxa interna de retorno é a taxa j^* que resolve a equação:

$$-1.000,00 + \frac{600}{1+j^*} + \frac{600}{(1+j^*)^2} + \frac{600}{(1+j^*)^3} = 0.$$

  A taxa interna de retorno, no caso, é $j^* = 0,3631$ ou 36,31%, e foi obtida por métodos numéricos (o leitor pode verificar que a substituição desse valor na equação a torna identica a zero).